Expresiones útiles en los sistemas de coordenadas ortogonales más usuales

Notación:

dl_i : elemento de longitud **paralelo** al versor i-ésimo

dS_i : elemento de superficie **normal** al versor i-ésimo ("base x altura")

dV : elemento de volumen ("lado x lado x lado")

Coordenadas cartesianas

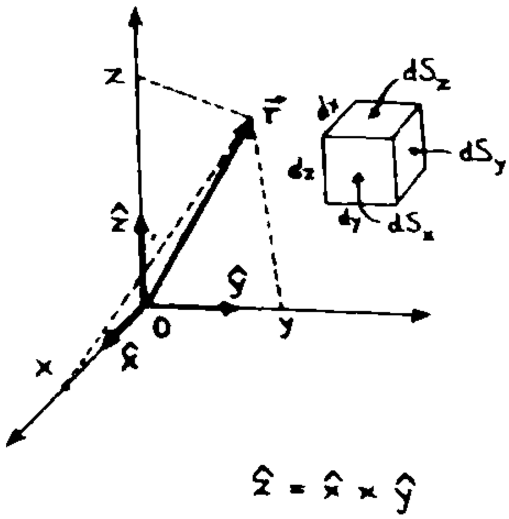

Fig. 1. Sistema de coordenadas cartesianas.

[Rodríguez Trelles, Félix. Temas de Electricidad y Magnetismo. Eudeba, 1984]

Variables: x, y, z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Versores: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

Vector posición: $\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$

Elementos de longitud: $dl_x = dx, \quad dl_y = dy, \quad dl_z = dz$

Elementos de superficie: $dS_x = dy\,dz, \quad dS_y = dz\,dx, \quad dS_z = dx\,dy$

Elemento de volumen: $dv = dx\,dy\,dz$

Coordenadas cilíndricas

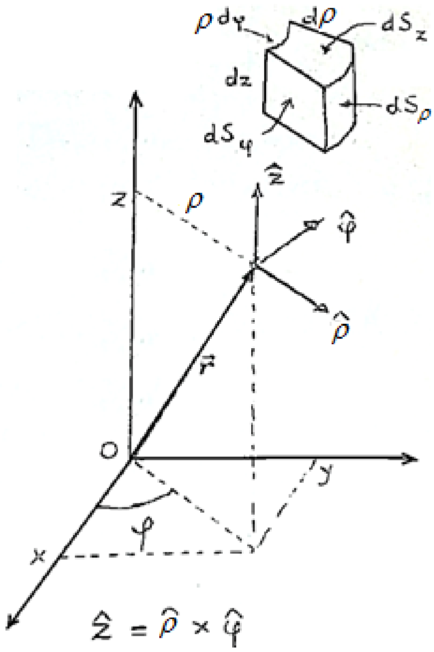

Fig. 2. Sistema de coordenadas cilíndricas.

Figura modificada de [Rodríguez Trelles, Félix. Temas de Electricidad y Magnetismo. Eudeba, 1984]

Variables:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \ \ (\rho \geq 0) \\ \varphi = \text{arctg}\ y/x \ (\varphi \in [0,2\pi)) \\ z \ (z \in \mathcal{R}) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi \\ z \end{array}}$$

$$\boxed{r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Versores:

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\ \hat{x} + \text{sen}\,\varphi\ \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\text{sen}\,\varphi\ \hat{x} + \cos\varphi\ \hat{y}$$

$\hat{z}$ (ídem cartesianas)

Vector posición: $\vec{r} = \rho\cos\varphi\ \hat{x} + \rho\,\text{sen}\,\varphi\ \hat{y} + z\ \hat{z}$

Elementos de longitud: $dl_\rho = d\rho$, $dl_\varphi = \rho d\varphi$, $dl_z = dz$

Elementos de superficie:

$$dS_\rho = dl_\varphi\ dl_z = \rho dl_\varphi dz$$

$$dS_\varphi = dl_\rho\ dl_z = d\rho\ dz$$

$$dS_z = dl_\varphi\ dl_\rho = \rho d\varphi\ d\rho$$

Elemento de volumen: $dv = (\rho d\varphi) d\rho dz = \rho d\rho d\varphi dz$

Coordenadas esféricas

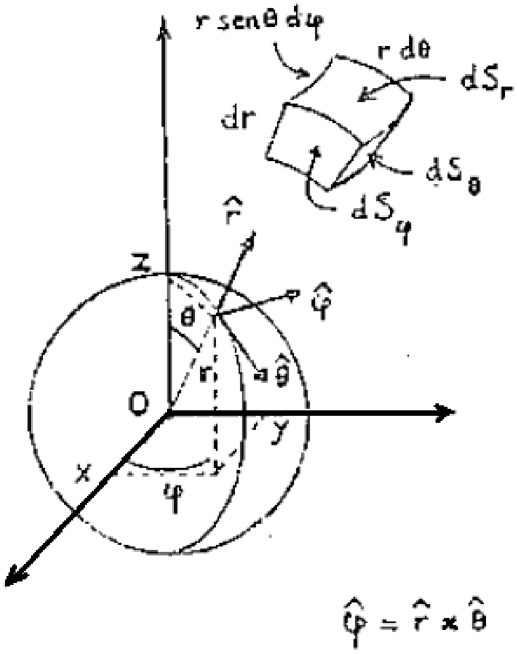

Fig. 3. Sistema de coordenadas esféricas.

[Rodríguez Trelles, Félix. Temas de Electricidad y Magnetismo. Eudeba, 1984]

Variables:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r \geq 0)$$

$$\theta = \arccos\frac{z}{r} \quad (\theta \in [0,\pi])$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} \quad (\varphi \in [0,2\pi))$$

$$x = \rho\cos\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Versores:

$$\hat{r} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$

Vector posición: $\vec{r} = r\left(\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$

Elementos de longitud: $dl_r = dr$, $dl_\theta = rd\theta$, $dl_\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\varphi$

Elementos de superficie:

$$dS_r = dl_\theta\,dl_\varphi = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$dS_\theta = dl_r\,dl_\varphi = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$dS_\varphi = dl_r\,dl_\theta = r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta$$

Elemento de volumen: $dv = (dr)(rd\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi) = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,drd\varphi$